Dissertations-Auszug

Untersuchungen zum Eindeutigkeitsproblem der Nomographie

Auszug aus der Inauguraldissertation desselben Titels,
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität in Tübingen

vorgelegt von

Hans-Rudolf Dienst,
geb. am 11. Juni 1924 in Halle a. d. S.

Tag der mündlichen Prüfung: 27. November 1951
Dekan: Prof. Dr. Kneser
1. Referent: Prof. Dr. Kneser 2. Referent: Prof. Dr. Kamke

Der Auszug ist erschienen in den Blättern der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band 1, Heft 4, S. 75—100, 1953.

Ein Exemplar der vollen Dissertation in Maschinenschrift und ein Kleinfilmnegativ und -positiv (Format 24×36 mm) befinden sich in der Universitätsbibliothek in Tübingen. Der Positivfilm kann in der Universitätsbibliothek benutzt werden. Auf Wunsch gibt die Universitätsbibliothek Positivkopien zu dem jeweils gültigen Kostensatz ab.

1953

Konrad Triltsch, Druck- und Verlagsanstalt, Würzburg

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Untersuchungen zum Eindeutigkeitsproblem der Nomographie

Von *Hans-Rudolf Dienst*, Stuttgart. °)

1. Der Ursprung des Problems in der Praxis.

Zur graphischen Auflösung einer Gleichung zwischen drei Veränderlichen

$$F(u, v, w) = 0 \tag{1}$$

benutzt man Nomogramme. Diese bestehen aus drei Kurvenscharen

$$\varphi^i(x, y,) = \text{const.} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

in der xy-Ebene mit folgenden Eigenschaften:

1. Durch jeden Punkt p_0 des betrachteten Gebietes $\mathfrak{G}$ geht genau eine Kurve $\varphi^i(x, y) = c_0^i$ jeder Schar; die drei Tangenten sind voneinander verschieden.
2. Es ist in $\mathfrak{G}$

$$F\{\varphi^1(x, y),\ \varphi^2(x, y),\ \varphi^3(x, y)\} \equiv 0\,.$$

Alle Nomogramme von (1) sind topologisch äquivalent, d. h. topologisch aufeinander abbildbar[1]). Umgekehrt bleiben die vorgenannten Nomogrammeigenschaften bei einer topologischen Transformation

$$\bar{x} = \bar{x}(x, y),\ \bar{y} = \bar{y}(x, y)$$

des Gebietes $\mathfrak{G}$, deren Funktionaldeterminante nicht verschwindet, erhalten. Daher bilden die durch diese Transformation entstandenen Kurvenscharen

$$\bar{\varphi}^i(\bar{x}, \bar{y}) = \text{const.} \quad (i = 1, 2, 3)\,,$$

wobei

$$\bar{\varphi}^i\{\bar{x}(x, y),\ \bar{y}(x, y)\} \equiv \varphi^i(x, y)$$

ist, wieder ein Nomogramm der Gleichung (1). Letzteres kann man ausnützen, um dem Nomogramm eine einfachere oder für praktische Anwendungen günstigere Gestalt zu geben.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die Kurvenscharen des Nomogramms aus lauter Geraden bestehen; denn dann ist das Nomogramm sehr

°) Es handelt sich um einen Auszug der Dissertation des Verfassers. Ein Exemplar der vollständigen Arbeit befindet sich in der Universitätsbibliothek in Tübingen.

[1]) Topologische Abbildung: eineindeutige und stetige Abbildung (Gummihautverzerrung).

einfach herzustellen, und außerdem kann man vermittels einer Korrelation zu einer sogenannten Fluchtlinientafel[2]) übergehen, die noch bequemer zu handhaben ist. Es stellt sich also hier die Frage, wann eine gegebene Gleichung (1) ein Geradennomogramm besitzt bzw., was etwa auf dasselbe herauskommt, wann ein Nomogramm (2) der Gleichung (1) auf ein Nomogramm aus drei Geradenscharen topologisch abgebildet werden kann. Ein brauchbares allgemeines Kriterium hierfür konnte noch nicht angegeben werden.

Darüber hinaus taucht folgendes Problem auf: Liegt bereits ein Geradennomogramm vor, so kann dieses natürlich beliebig projektiv transformiert werden, ohne daß es seinen Charakter als Geradennomogramm verliert. Im allgemeinen dürften diese Transformationen dem Praktiker genügen, um ein für seine Zwecke günstiges Geradennomogramm zu erhalten. Hin und wieder wird jedoch auch das Bedürfnis entstehen, ein Geradennomogramm der vorgelegten Gleichung von grundsätzlich anderer Art zu erhalten. In diesem Falle müßte es also mindestens zwei projektiv verschiedene Geradennomogramme der Gleichung (1) oder — wieder anders ausgedrückt — mindestens zwei projektiv verschiedene topologische Abildungen geben, die ein Nomogramm (2) von (1) in ein Geradennomogramm überführen. Wann trifft das zu und wann nicht? Das ist das „Eindeutigkeitsproblem der Nomographie".

2. *Die exakte mathematische Formulierung des Problems.*

Vom Standpunkt der reinen Mathematik gesehen, ist das Eindeutigkeitsproblem der Nomographie ein Problem der Gewebegeometrie. Wir definieren:

Definition 1: Es sei

$\mathfrak{p} = (x, y)$ ein Punkt der reellen xy-Ebene,

$\bar{\mathfrak{p}} = (\bar{x}, \bar{y})$ ein Punkt der reellen $\bar{x}\bar{y}$-Ebene,

$\mathfrak{G}$ ein bezüglich der Achsenparallelen $\bar{x} = \text{const.}$ konvexes endliches Gebiet der $\bar{x}\bar{y}$-Ebene,

$\mathfrak{p} = t(\bar{\mathfrak{p}})$[3]) eine topologische Abbildung des Gebietes $\overline{\mathfrak{G}}$ auf ein endliches Gebiet $\mathfrak{G}$ der xy-Ebene,

ihre Umkehrung

$$\bar{\mathfrak{p}} = t^{-1}(\mathfrak{p}) : \bar{x} = \varphi(x, y),\ \bar{y} = \psi(x, y)\,.$$

Dann bilden die Kurvenstücke

$$\{\mathfrak{p} = t(\bar{\mathfrak{p}}),\ \bar{\mathfrak{p}} = (\bar{x}, \bar{y})\, \varepsilon\, \overline{\mathfrak{G}}\,,\ \bar{x} = \text{const.}\}_{\mathfrak{p}}$$

---

[2]) Fluchtlinientafel: drei (eventuell zusammenfallende) Kurven mit u-, v-, w-Skala. Die Lösungstripel u, v, w der Gleichung (1) gehören genau zu den Punkttripeln, die auf einer Geraden liegen.

[3]) Diese Schreibweise ist vektoriell aufzufassen. $\bar{\mathfrak{p}} = t(\mathfrak{p})$ bedeutet also

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{x}(x, y)\,,\ \bar{y}(x, y)\}\,.$$

die *Kurvenschar* $S(\varphi; \mathfrak{G})$. Sind sämtliche Kurvenstücke Geradenstücke, so heißt $S(\varphi; \mathfrak{G})$ auch *Geradenschar.*

Die Funktion $\varphi(x, y)$ wird in $\mathfrak{G}$ als *Normalparameter* der Schar $S(\varphi; \mathfrak{G})$ bezeichnet. Ist sie c_k-differenzierbar [4]) in $\mathfrak{G}$, so heißt $S(\varphi; \mathfrak{G})$ *c_k-differenzierbare Kurven- bzw. Geradenschar.*

Definition 2: Zwei Kurvenscharen $S(\varphi; \mathfrak{G})$ und $S(\psi; \mathfrak{H})$ heißen *äquivalent,* wenn $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$ ist und für zwei beliebige Punkte $\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'' \varepsilon \mathfrak{G}$ gilt:

$$\varphi(\mathfrak{p}') = \varphi(\mathfrak{p}'') \longleftrightarrow \psi(\mathfrak{p}') = \psi(\mathfrak{p}'') .$$

Gilt darüber hinaus sogar $\varphi(\mathfrak{p}') = \psi(\mathfrak{p}')$, so heißen die Kurvenscharen *stark äquivalent.*

Definition 3: Es seien $S(\varphi^i; \mathfrak{G}^i)$ $(i = 1 \ldots n)$ n c_1-differenzierbare Kurvenscharen, ferner sei $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{G}^i \neq \varnothing$, $\mathfrak{G} \leq \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{G}^i$ ein Gebiet der xy-Ebene und

$$D^{ik}(\mathfrak{p}) = \frac{\partial(\varphi^i, \varphi^k)}{\partial(x, y)} (\mathfrak{p}) \neq 0 \quad (i \neq k)$$

in $\mathfrak{G}$. Dann bilden die Scharen $S(\varphi^i; \mathfrak{G}^i)$ in $\mathfrak{G}$ ein *Kurven-n-Gewebe* $G(\varphi^1, \ldots \varphi^n; \mathfrak{G})$. Ist jede Schar Geradenschar, so heißt $G(\varphi^1, \ldots \varphi^n; \mathfrak{G})$ auch *Geraden-n-Gewebe.*

Die Funktionen $\varphi^i(x, y)$ werden in $\mathfrak{G}$ als *Normalparameter* des Gewebes bezeichnet.

Definition 4: Zwei Kurvengewebe $G(\varphi^1, \ldots \varphi^n; \mathfrak{G})$, $G(\psi^1, \ldots \psi^n; \mathfrak{H})$ heißen *(stark) äquivalent,* wenn $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$ ist und es Gebiete $\mathfrak{G}^i$ $(i = 1 \ldots n)$ gibt, so daß $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{G}^i$ ist und die Kurvenscharen $S(\varphi^i; \mathfrak{G}^i)$ und $S(\psi^i; \mathfrak{G}^i)$ vorhanden und für festes i (stark) äquivalent sind.

Definition 5: Es seien $G(\varphi^1, \ldots \varphi^n; \mathfrak{G})$, $G(\psi^1, \ldots \psi^n; \mathfrak{H})$ zwei Kurven-n-Gewebe, $\mathfrak{p}_0 \varepsilon \mathfrak{G} \frown \mathfrak{H}$ und Γ eine Gruppe von in $\mathfrak{p}_0$, d. h. in einer geeigneten Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{p}_0$ [5]), topologischen Transformationen der

---

[4]) k durchlaufe den Wertebereich $\{0, 1, 2 \ldots ; a\}$; dabei gelte $a + 1 = a$ und $a > n$ für jedes endliche n. „c_k-differenzierbar" bedeutet dann für

$k = 0$	„stetig in . . .
$k = 1, 2 \ldots$	„k-mal stetig partiell differenzierbar nach . . .
$k = a$	„analytisch in . . .

. . . sämtlichen Argumenten". Gegebenenfalls kann durch besonderen Hinweis die Menge der zu betrachtenden Argumente eingeschränkt werden.

[5]) Unter einer „in $\mathfrak{p}_0$ $\frac{\text{topologischen}}{\text{analytischen}}$ Transformation" γ wollen wir eine in einer geeignet gewählten $\frac{\text{reellen}}{\text{komplexen}}$ Umgebung $\mathfrak{U}_\gamma$ von $\mathfrak{p}_0$ definierte Transformation $\bar{\mathfrak{p}} = g(\mathfrak{p})$ verstehen, die diese Umgebung $\mathfrak{U}_\gamma$ $\frac{\text{topologisch}}{\text{analytisch}}$ in die $\frac{\text{reelle}}{\text{komplexe}}$ $\mathfrak{p}$-Ebene abbildet. Es handelt sich also genauer um einen *„Transformationskeim".*

xy-Ebene, die $\mathfrak{p}_0$ fest lassen. Dann heißen die beiden Gewebe (*stark*) *Γ-äquivalent* (in $\mathfrak{p}_0$) — in Zeichen

$$G(\varphi^1, .. \varphi^n;\ \mathfrak{G}) \underset{\Gamma}{\overset{(\approx)}{\sim}} G(\psi^1, .. \psi^n;\ \mathfrak{H}) ,$$

wenn es Teilgebiete $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}' \leq \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{p}_0 \varepsilon \mathfrak{G}' \cap \mathfrak{H}'$ und ein Element $\gamma \varepsilon \Gamma$ — etwa $\gamma : \bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{g}(\mathfrak{p})$ — gibt, so daß γ $\mathfrak{H}'$ auf $\mathfrak{G}'$ topologisch abbildet und die Kurvengewebe

$$G(\varphi^1, .. \varphi^n;\ \mathfrak{G}'), G(\bar{\varphi}^1, .. \bar{\varphi}^n;\ \mathfrak{G}'), \bar{\varphi}^i(\mathfrak{p}) = \psi^i\{\mathfrak{g}(\mathfrak{p})\}$$

vorhanden und (stark) äquivalent sind.

Bei den Definitionen 3—5 handelt es sich um Äquivalenzrelationen im mathematisch strengen Sinne.

Wir formulieren nunmehr unser Problem:

Es sei

$\mathfrak{M}^n$ die Menge der Kurven-n-Gewebe $G(\varphi^1, .. \varphi^n;\ \mathfrak{G})$ mit $\mathfrak{p}_0 \varepsilon \mathfrak{G}$,

$\tilde{\mathfrak{M}}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{M}^n$,

$\bar{\mathfrak{M}}^n$ die Menge der Geraden-n-Gewebe aus $\mathfrak{M}^n$,

T_1 die Gruppe der in $\mathfrak{p}_0$ c_1-differenzierbaren topologischen Abbildungen, die $\mathfrak{p}_0$ fest lassen und deren Funktionaldeterminante in $\mathfrak{p}_0$ nicht verschwindet,

Π die Gruppe der projektiven Abbildungen der xy-Ebene, die $\mathfrak{p}_0$ fest lassen,

a) $Z_1^n(G)$ b) $z_1^n(G)$

die maximale Anzahl der Geraden-n-Gewebe $\bar{G}_j \varepsilon \bar{\mathfrak{M}}^n$, die bei gegebenem Kurven-n-Gewebe $G \varepsilon \mathfrak{M}^n$ die Bedingungen

a) $\bar{G}_j \underset{T_1}{\approx} G$ b) $\bar{G}_j \underset{T_1}{\sim} G$

$\bar{G}_i \underset{\Pi}{\not\approx} \bar{G}_j$ $(i \neq j)$ $\bar{G}_i \underset{\Pi}{\not\sim} \bar{G}_j$ $(i \neq j)$

erfüllen. Wie groß ist

(3) a) $Z_1^n(\tilde{\mathfrak{M}}) = \underset{G \varepsilon \tilde{\mathfrak{M}}}{\mathrm{Max}}\, Z_1^n(G)$ b) $z_1^n(\tilde{\mathfrak{M}}) = \underset{G \varepsilon \mathfrak{M}}{\mathrm{Max}}\, z_1^n(G)$?

Der Fall a) ist im wesentlichen das oben umrissene Eindeutigkeitsproblem der Nomographie; denn die starke Γ-Äquivalenz von Geweben entspricht der topologischen Abbildung von Nomogrammen. Allerdings werden hier — das sei ausdrücklich betont — nur die Verhältnisse „im Kleinen" berücksichtigt, d. h. in einer beliebig klein wählbaren Umgebung des betrachteten Punktes $\mathfrak{p}_0$. Das erscheint zunächst vom Standpunkt des Praktikers aus unbefriedigend, da diesen ja nur die Lösungen in einem bestimmten endlichen Gebiet $\mathfrak{G}$ interessieren. Letztere sind jedoch bis auf eine Translation, die den Bildpunkt $\bar{\mathfrak{p}}_0$ in den Punkt $\mathfrak{p}_0$ überführt, für jeden Punkt $\mathfrak{p}_0$ dieses Gebietes Lösungen „im Kleinen", so daß $Z_1^n(G)$ zugleich eine obere Schranke für die Anzahl der Abbildungen im Großen gibt, wenn $\mathfrak{p}_0$ in $\mathfrak{G}$ liegt. Die Verallgemeinerung des Problems von $n = 3$ auf beliebiges n liegt

in der Art der reinen Mathematik, und die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen werden durch die anzuwendenden differentialgeometrischen und funktionentheoretischen Untersuchungsmethoden aufgezwungen.

Der Fall b) wird i. a. vom reinen Mathematiker bevorzugt, da die hierbenutzte Äquivalenz von Geweben bis auf Translationen mit geometrischer Kongruenz im Kleinen identisch ist, also ein rein geometrisch-topologisches Problem vorliegt. Es zeigt sich im folgenden, daß man beide Versionen zugleich betrachten kann.

Leider ist das Problem in der obigen Form nicht zu behandeln, obwohl die Formulierung durchaus allen Ansprüchen mathematischer Strenge genügt. Das liegt vor allem daran, daß der Begriff der „topologischen Abbildung im Kleinen" auf eine reichlich unbequeme Weise in die Definition der Äquivalenz bzw. Γ-Äquivalenz für Gewebe eingebaut werden mußte (vgl. Definition 4). Um diesen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, führen wir den Begriff des Kurven-n-Keims ein:

Definition 6: Die reellen Funktionen $\varphi^i(x, y)$ $(i = 1 \,..\, n;\ n \geqq 2)$ seien im Punkte $\mathfrak{p}_0$ definiert und c_k-differenzierbar[4]), $k \geqq 1$, und es gelte

$$D^{ik}(\mathfrak{p}_0) = \frac{\partial(\varphi^i, \varphi^k)}{\partial(x, y)}(\mathfrak{p}_0) \neq 0 \quad (i, k = 1 \,..\, n;\ i \neq k).$$

Dann bildet das n-tupel $(\varphi^1, .. \varphi^n)$ in $\mathfrak{p}_0$ einen *c_k-differenzierbaren Kurven-n-Keim* $K(\varphi^1, .. \varphi^n; \mathfrak{p}_0)$. Gibt es in $\varphi_0^i = \varphi^i(\mathfrak{p}_0)$ stetige Funktionen $a^i(\varphi^i)$, $b^i(\varphi^i)$ $(i = 1 \,..\, n)$ mit

$$|\, a^i(\varphi_0^i)\,| + |\, b^i(\varphi_0^i)\,| \neq 0,$$

so daß in $\mathfrak{p}_0$

$$a^i\{\varphi^i(\mathfrak{p})\}\varphi_x^i(\mathfrak{p}) \equiv b^i\{\varphi^i(\mathfrak{p})\}\varphi_y^i(\mathfrak{p}) \quad (i = 1 \,..\, n)\ ^6)$$

gilt, so heißt $K(\varphi^1, .. \varphi^n; \mathfrak{p}_0)$ auch *c_k-differenzierbarer Geraden-n-Keim.*

Definition 7: Es seien $K(\varphi^1, .. \varphi^n; \mathfrak{p}_0)$, $K(\psi^1, .. \psi^n; \mathfrak{p}_0)$ zwei Kurven-n-Keime und Γ eine Gruppe in $\mathfrak{p}_0$, d. h. in einer geeignet gewählten Umgebung von $\mathfrak{p}_0$, topologischer Transformationen, die den Punkt $\mathfrak{p}_0$ in sich überführen. Gibt es dann ein Element $\gamma \varepsilon \Gamma$ — etwa $\gamma : \bar{\mathfrak{p}} = g(\mathfrak{p})$ — und n in $\varphi_0^i = \varphi^i(\mathfrak{p}_0)$ c_1-differenzierbare Funktionen $\Phi^i(\varphi^i)$ mit

$$\frac{d}{d\varphi^i}\,\Phi^i(\varphi_0^i) \neq 0,$$

so daß in $\mathfrak{p}_0$

$$\psi^i\{g(\mathfrak{p})\} \equiv \Phi^i\{\varphi^i(\mathfrak{p})\} \quad (i = 1 \,..\, n)$$

ist, so sind die beiden Keime *Γ-äquivalent* — in Zeichen

$$K(\varphi^1, .. \varphi^n; \mathfrak{p}_0) \underset{\Gamma}{\sim} K(\psi^1, .. \psi^n; \mathfrak{p}_0).$$

Gilt insbesondere

$$\Phi^i(\varphi^i) \equiv \varphi^i \quad (i = 1, .. n),$$

---

[6]) $f(\mathfrak{p}) \equiv 0$ in $\mathfrak{p}_0$: Es gibt eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{p}_0$, so daß für alle $\mathfrak{p} \varepsilon \mathfrak{U}$ $f(\mathfrak{p}) = 0$ ist.

so sind sie stark Γ-äquivalent — in Zeichen

$$K(\varphi^1, .. \varphi^n; \mathfrak{p}_0) \underset{\Gamma}{\approx} K(\psi^1, .. \psi^n; \mathfrak{p}_0) .$$

Jedes Kurven-n-Gewebe induziert in jedem seiner Punkte einen Kurven-n-Keim, und zu jedem Kurven-n-Keim in $\mathfrak{p}_0$ gibt es ein Gewebe, das ihn im Punkte $\mathfrak{p}_0$ induziert. Zwischen den Kurven-n-Geweben, deren Gebiet $\mathfrak{G}$ den Punkt $\mathfrak{p}_0$ enthält, und den Kurven-n-Keimen in $\mathfrak{p}_0$ besteht folgende Beziehung:

Hilfssatz 1: Es sei

$\mathfrak{N}^n$ die Menge der Kurven-n-Keime in $\mathfrak{p}_0$,

$\widetilde{\mathfrak{N}}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{N}^n$,

$\overline{\mathfrak{N}}^n$ die Menge aller Geraden-n-Keime in $\mathfrak{p}_0$,

$\widetilde{\mathfrak{M}}$ die Menge aller Kurven-n-Gewebe aus $\mathfrak{M}^n$, die in $\mathfrak{p}_0$ Kurven-n-Keime aus $\widetilde{\mathfrak{N}}$ induzieren,

a) $Z_1^n(K)$ b) $z_1^n(K)$

die maximale Anzahl der Geraden-n-Keime $\overline{K}_j \varepsilon \overline{\mathfrak{N}}^n$, die bei gegebenem Kurven-n-Keim $K \varepsilon \mathfrak{N}^n$ die Bedingungen

a) $\overline{K}_j \underset{T_1}{\approx} K$ b) $\overline{K}_j \underset{T_1}{\sim} K$

$\overline{K}_i \underset{II}{\not\approx} \overline{K}_j \ (i \neq j)$ $\overline{K}_i \underset{II}{\not\sim} \overline{K}_j \ (i \neq j)$

erfüllen. Dann ist

$$Z_1^n(\widetilde{\mathfrak{N}}) = Z_1^n(\widetilde{\mathfrak{M}}), \quad z_1^n(\widetilde{\mathfrak{N}}) = z_1^n(\widetilde{\mathfrak{M}}), \tag{4}$$

$$Z_1^n(\widetilde{\mathfrak{N}}) \geqq z_1^n(\widetilde{\mathfrak{N}}) .$$

Wir stellen uns daher jetzt die mathematisch wesentlich durchsichtigere Aufgabe, $Z_1^n(\widetilde{\mathfrak{N}})$ zu bestimmen. Damit erhalten wir nach (4_3) zugleich eine obere Schranke für $z_1^n(\widetilde{\mathfrak{N}})$.

3. Bestimmung von $Z_2^n(\mathfrak{N}_2^n)$ für $n \geqq 4$.

Ist $\mathfrak{N}_k^n$ die Menge der c_k-differenzierbaren Kurven-n-Gewebe und gehört der Keim $K(\varphi^1, .. \varphi^n; \mathfrak{p}_0)$ zu $\mathfrak{N}_2^n$, so ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß dieser Keim ein Geraden-n-Keim ist:

$$A\varphi^i(\mathfrak{p}) \equiv \{(\varphi_y^i)^2 \varphi_{xx}^i - 2\varphi_x^i \varphi_y^i \varphi_{xy}^i + (\varphi_x^i)^2 \varphi_{yy}^i\}(\mathfrak{p}) \equiv 0 \ (i = 1 .. n) ; \tag{5}$$

A ist als Operator aufzufassen. Soll nun auch der zu $K(\varphi^1, .. \varphi^n; \mathfrak{p}_0)$ topologisch äquivalente Kurven-n-Keim

$$K(\psi^1, .. \psi^n; \mathfrak{p}_0), \ \psi^i(\mathfrak{p}) = \varphi^i\{g(\mathfrak{p})\} , \tag{6}$$

ein Geraden-n-Keim sein, so muß auch

$$A\psi^i(p) \equiv 0 \quad (i = 1 \,..\, n) \tag{7}$$

gelten. Aus den Relationen (5, 7) folgt, daß die topologische Abbildung

$$\bar{p} = g(p) = \{u(x, y),\ v(x, y)\} \tag{8}$$

notwendig in p_0 dem Differentialgleichungssystem

$$\left(\frac{\varphi_x^i}{\varphi_y^i}\right)^3 (u_y v_{yy} - v_y u_{yy}) - \left(\frac{\varphi_x^i}{\varphi_y^i}\right)^2 (u_x v_{yy} + 2u_y v_{xy} - v_x u_{yy} - 2v_y u_{xy}) +$$
$$+ \frac{\varphi_x^i}{\varphi_y^i} (u_y v_{xx} + 2u_x v_{xy} - v_y u_{xx} - 2v_x u_{xy}) - u_x v_{xx} - v_x u_{xx} \equiv 0 \tag{6}$$
$$(i = 1 \,..\, n)$$

genügt. Ist $n \geqq 4$, so bildet (9) für $i = 1, 2, 3, 4$ ein lineares homogenes Gleichungssystem mit der Determinante

$$\left| \left(\frac{\varphi_x^i}{\varphi_y^i}\right)^{\nu-1} \right| \quad (i, \nu = 1 \,..\, 4).$$

Diese Vandermondesche Determinante verschwindet in p_0 nicht, also gilt notwendig in p_0

$$\begin{aligned} &u_y v_{yy} - v_y u_{yy} \equiv 0 \\ &u_x v_{yy} + 2u_y v_{xy} - v_x u_{yy} - 2v_y u_{xy} \equiv 0 \\ &u_y v_{xx} + 2u_x v_{xy} - v_y u_{xx} - 2v_x u_{xy} \equiv 0 \\ &u_x v_{xx} - v_x u_{xx} \equiv 0 . \end{aligned} \tag{10}$$

Alle Lösungen des Differentialgleichungssystems (10) sind von der Form

$$u(x, y) \equiv \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3}, \quad v(x, y) \equiv \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3}, \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i = \text{const.},$$

d. h. die Abbildung (7) ist notwendig projektiv. Daraus schließt man ohne weiteres

$$Z_2^n (\mathfrak{N}_2^n) \leqq 1 \quad (n \geqq 4) \tag{11 a}$$

und nach (4_3)

$$z_2^n (\mathfrak{N}_2^n) \leqq 1 \quad (n \geqq 4). \tag{11 b}$$

Diese Aussagen lassen sich mit Rücksicht auf Hilfssatz 1 weniger exakt, aber wohl anschaulicher folgendermaßen formulieren:

Jede c_2-differenzierbare topologische Transformation, die ein beliebiges n-Nomogramm mit $n \geqq 4$, dessen Gewebe in p_0 c_2-differenzierbar[7]*) ist, im Kleinen auf ein geradliniges n-Nomogramm abbildet, ist, falls sie existiert, bis auf Kollineationen eindeutig bestimmt.*

Jede c_2-differenzierbare topologische Transformation, die ein beliebiges in p_0 c_2-differenzierbares Kurven-n-Gewebe mit $n \geqq 4$ im Kleinen auf

[7]) Genauer: ein Kurven-n-Gewebe, das in p_0 einen c_2-differenzierbaren Kurven-n-Keim induziert.

ein Geraden-n-Gewebe abbildet, ist, falls sie existiert, bis auf Kollineationen eindeutig bestimmt.

4. Topologische Invarianten.

Bei 3-Nomogrammen, also im Falle des eigentlichen Eindeutigkeitsproblems der Nomographie ist die vorstehende Methode nicht mehr anwendbar; denn das System (9) läßt in diesem Falle außer der naheliegenden Lösung (10) eine unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen zu, die von einer zunächst willkürlich wählbaren Funktion C(x, y) abhängen. Die Integrabilitätsbedingungen 3. und 4. Ordnung für u und v ergeben dann ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung für diese Funktion[8]). Mit letzterem ist jedoch seiner komplizierten Form wegen nicht viel anzufangen. Wir folgen daher im Falle $n = 3$ dem von Bol[9]) gewiesenen Weg topologisch invarianter Behandlung des Problems:

Zunächst der Begriff der „topologischen Invarianten":

Definition 8: Es sei

$K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; p_0) \varepsilon \mathfrak{N}_3^3$, d. h. ein beliebiger c_3-differenzierbarer Kurven-3-Keim,

$I\varphi = f\{\varphi^i, \varphi_x{}^i, \varphi_y{}^i, \varphi_{xx}^i \ldots (i = 1, 2, 3)\}$ eine in p_0 existierende Funktion,

$\Phi^i(\varphi^i)$ $(i = 1, 2, 3)$ eine beliebige in $\varphi_0^i = \varphi^i(p_0)$ c_1-differenzierbare Funktion mit dort nicht verschwindender Ableitung,

$\bar{p} = t(p)$ eine beliebige Abbildung der Gruppe T_3[10]),

so daß der Kurven-3-Keim

$$K(\bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^2, \bar{\varphi}^3; p_0), \quad \bar{\varphi}^i(p) = \Phi^i\{\varphi^i[t^{-1}(p)]\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

vorhanden und ebenfalls Element von $\mathfrak{N}_3^3$ ist. Gilt dann dort für jede solche Abbildung die Identität

$$I\bar{\varphi}[t(p)] \equiv \sigma^\alpha(p)\, I\varphi(p)$$

für konstantes α und

$$\sigma(p) = \left\{ \prod_{i=1}^{3} \frac{d}{d\varphi^i} \Phi^i[\varphi^i(p)] \right\}^{-1/3}$$

so heißt $I\varphi$ *topologische Halbvariante vom Gewicht* α, bzw. für $\alpha = 0$ *topologische Absolutionsvariante* der Menge $\mathfrak{N}_3^3$.

Für jede topologische Invariante[11]) $I\varphi$ folgt demnach aus

$$I\varphi \equiv 0$$

---

[8]) Vgl. etwa *Gronwall*, Sur les équations entre trois variables, J. Liouville 1912, S. 59 ff.

[9]) Vgl. *Blaschke und Bol*, Geometrie der Gewebe, Berlin 1938, S. 94—100, 142 ff.

[10]) T_3 ist, wie oben bereits formuliert, die Gruppe der in p_0 c_3-differenzierbaren topologischen Abbildungen, die p_0 festlassen und deren Funktionaldeterminante in p_0 nicht verschwindet.

[11]) Wenn wir allgemein von „Invarianten" reden, wollen wir sowohl Absolut-, als auch Halbinvarianten darunter verstehen.

stets

$$I_{\varphi} \equiv 0,$$

wenn der Keim $K(\psi^1, \psi^2, \psi^3; \mathfrak{p}_0)$ dem Keim $K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; \mathfrak{p}_0)$ topologisch äquivalent ist. Die Relation $I\varphi \equiv 0$ ist also unabhängig davon, welches spezielle aus einer Menge topologisch äquivalenter Gewebe wir den Betrachtungen zugrundelegen, sie ist — kurz gesagt — „topologisch invariant". Mit Hilfe solcher topologisch invarianter Relationen werden wir im folgenden unsere Untersuchungen durchführen.

Wir benötigen zunächst Invarianten. Um solche zu gewinnen, führen wir die Differentiatoren Δ^i und Θ_i ein, die, angewendet auf eine c_1-differenzierbare Funktion $\omega(\mathfrak{p})$, folgende Bedeutung haben sollen:

$$\Delta^i\omega = D^{-2/3} D^{kl}\{\varphi^i_y\, \omega_x - \varphi^i_x\, \omega_y\},\ D^{kl} = \begin{vmatrix} \varphi^k_x & \varphi^l_x \\ \varphi^k_y & \varphi^l_y \end{vmatrix},\ D = D^{12}\, D^{23}\, D^{31}$$

(12) (i, k, l = 1, 2, 3 zyklisch)

$$\Theta_1\omega = \frac{1}{\varepsilon^2 - \varepsilon}(\varepsilon^2\Delta^1\omega - \Delta^2\omega),\ \Theta_2\omega = \frac{1}{\varepsilon^2 - \varepsilon}(-\varepsilon\Delta^1\omega + \Delta^2\omega) \Big\{ \begin{matrix} \varepsilon^3 = 1, \\ \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \end{matrix}$$

Die Operatoren Θ_i sind linear unabhängig im Gegensatz zu den Δ^i, für die offenbar $\sum_{i=1}^{3} \Delta^i = 0$ gilt. Bildet man mit den Operatoren Θ_i die „Klammern"

$$[\Theta_1\Theta_2]\,\omega = \Theta_1\Theta_2\omega - \Theta_2\Theta_1\omega\,,$$

so ist

$$[\Theta_1\Theta_2]\,\omega = h_2\Theta_1\omega - h_1\Theta_2\omega\,.$$

Die „Klammerkoeffizienten" h_i sind Funktionen von x und y, sie hängen jedoch nur von den Funktionen φ^i und ihren Ableitungen ab. Wir schreiben daher

$$h_j(x, y) = f_j\{\varphi^i, \varphi^i_x, \varphi^i_y, \ldots i = 1, 2, 3)\} = H_j(\varphi)\ (j = 1, 2)\,,$$

wobei H_j also wie I in Definition 8 die Bedeutung eines Operators hat. Der Ausdruck

(13) $$P\varphi = \Theta_2 H_1\varphi - \Theta_1 H_2\varphi$$

ist dann eine topologische Halbinvariante. Genau gilt:

Hilfssatz 2: Es sei $K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; \mathfrak{p}_0) \in \mathfrak{M}^3_k$ ($k \geq 3$), d. h. ein c_k-differenzierbarer Kurven-3-Keim. Dann ist die Funktion $P\varphi$ topologische Halbinvariante vom Gewicht 2 der Menge $\mathfrak{M}^3_k$ und in $\mathfrak{p}_0$ c_{k-3}-differenzierbar.

Die Differentiatoren Δ^i geben geometrisch Ableitungen längs der entsprechenden Kurvenscharen $\varphi^i = \text{const}$. Leider sind sie, ebenso wie die aus ihnen linear kombinierten Differentiatoren Θ_j nicht topologisch invariant, d. h. die Δ- bzw. Θ-Ableitungen einer topologischen Invarianten sind im allgemeinen *nicht* wieder topologische Invarianten. Dagegen liefern die Ausdrücke

(14) $$I_j\varphi = \Theta_j I\varphi + \alpha\, H_j\varphi\, I\varphi = (I\varphi)_j\ (j = 1, 2)$$

solche. Man nennt sie daher „kovariante Ableitungen von $I\varphi$". Genauer gilt:

Hilfssatz 3: Es sei

$K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; \mathfrak{p}_0) \varepsilon \mathfrak{N}_k^3$, d. h. c_k-differenzierbarer Kurven-3-Keim,
$I\varphi$ eine in $\mathfrak{p}_0$ c_l-differenzierbare topologische Halbinvariante vom Gewicht α der Menge $\mathfrak{N}_3$
$k \geqq 3, l \geqq 1$.

Dann existieren in $\mathfrak{p}_0$ die kovarianten Ableitungen $(I\varphi)_j$; sie sind topologische Halbinvarianten vom Gewicht $\alpha + 1$ der Menge $\mathfrak{N}_3^3$ und in $\mathfrak{p}_0$ c_m-differenzierbar, $m = \mathrm{Min}(k - 2, l - 1)$.

Für die kovarianten Ableitungen tritt an Stelle der Bedingung $\omega_{xy} = \omega_{yx}$ bei gewöhnlicher Differentiation für eine in $\mathfrak{p}_0$ c_2-differenzierbare Halbinvariante $I\varphi$ vom Gewicht α die Bedingung

$$(I\varphi)_{12} - (I\varphi)_{21} \equiv \alpha\, P\varphi\, I\varphi\,.$$

Man bezeichnet sie gewöhnlich als „Integrabilitätsbedingung".
Die kovariante Differentiation gibt die Möglichkeit, aus jeder topologischen Invarianten $I\varphi$ beliebig viele weitere Invarianten, bzw. aus jeder topologisch invarianten Relation $I\varphi \equiv 0$ beliebig viele weitere solche Relationen zu gewinnen.

5. Das Bolsche Differentialgleichungssystem.

Es sei $K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; \mathfrak{p}_0)$ ein Kurven-3-Keim und $K(\psi^1, \psi^2, \psi^3; \mathfrak{p}_0)$ ein ihm stark topologisch äquivalenter Geraden-3-Keim; d. h., nach Definition 7 gibt es eine topologische Transformation

$$\bar{x} = u(x, y)\,, \quad \bar{y} = v(x, y)\,, \tag{15}$$

so daß in $\mathfrak{p}_0$

$$\psi^i\{u(x, y), v(x, y)\} \equiv \varphi^i(x, y) \quad (i = 1, 2, 3)$$

ist. Der Keim $K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; \mathfrak{p}_0)$ und die Transformationen (15) seien hinreichend oft differenzierbar.

Übertragen wir unsere Betrachtungen in die projektive Ebene, so erscheint die Transformation (15) in der Form

$$\bar{w}^i = w^i(x, y) \quad (i = 1, 2, 3)\,,$$

wobei also

$$u(x, y) = \frac{w^1(x, y)}{w^3(x, y)}, \quad v(x, y) = \frac{w^2(x, y)}{w^3(x, y)}$$

ist. Die Funktion $w^3(x, y)$ ist zunächst weitgehend willkürlich wählbar. Sie wird eindeutig festgelegt, indem wir statt des Vektors $\mathfrak{w} = (w^1, w^2, w^3)$ den Vektor

$$\mathfrak{v} = \mathbb{W}^{-2/3}\mathfrak{w}\,, \quad \mathbb{W} = (\mathfrak{w}, \Theta_1\mathfrak{w}, \Theta_2\mathfrak{w}) \tag{16}$$

betrachten; denn $\mathfrak{v}$ ist unabhängig von der speziellen Wahl der Funktion

w^3. Der Vektor $\mathfrak{w}$ ist wie jede reine Ortsfunktion Absolutinvariante, die Determinante

$$W = (\mathfrak{w}, \Theta_1\mathfrak{w}, \Theta_2\mathfrak{w}) = (\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2)$$

also nach Hilfssatz 3 Halbinvariante vom Gewicht 2. Daher ist der Vektor $\mathfrak{v}$ Halbinvariante vom Gewicht $-2/3$, und es gilt

$$(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2) \equiv 1 . \tag{17}$$

Wir benutzen nun die linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ als bewegliches projektives Bezugssystem. Dann lassen sich alle anderen Vektoren der projektiven Ebene linear durch diese Vektoren ausdrücken. Insbesondere erhält man für die zweiten kovarianten Ableitungen aus (12) und den Geradlinigkeitsbedingungen

$$\Delta q^i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3) ,$$

die sich jetzt in der Form

$$(\Delta^i\Delta^i\mathfrak{v}, \Delta^i\mathfrak{v}, \mathfrak{v}) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

schreiben lassen, das System

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_{11} &\equiv -\tfrac{1}{3} C_2 \mathfrak{v} + \tfrac{1}{3} C \mathfrak{v}_2 , \quad \mathfrak{v}_{12} \equiv (\tfrac{1}{3} C^2 - \tfrac{1}{3} \varrho) \mathfrak{v} , \\ \mathfrak{v}_{22} &\equiv -\tfrac{1}{3} C_1 \mathfrak{v} + \tfrac{1}{3} C \mathfrak{v}_1 , \quad \mathfrak{v}_{21} \equiv (\tfrac{1}{3} C^2 + \tfrac{1}{3} \varrho) \mathfrak{v} ; \end{aligned} \tag{18}$$

die Funktion $C(x, y)$ ist eine Halbinvariante vom Gewicht 1 und genügt dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} C_{11} &\equiv -C C_2 - \varrho_2 , \\ C_{22} &\equiv -C C_1 + \varrho_1 . \end{aligned} \tag{19}$$

In dieser Form wurde das Differentialgleichungssystem von *Bol* angegeben.[12])

Ist umgekehrt $C(x, y)$ eine beliebige Lösung des Differentialgleichungssystems (19), so ist das System (18) vollständig integrabel, und aus jedem Lösungsvektor $\mathfrak{v} = (v^1, v^2, v^3)$, $v^3(p_0) \neq 0$, erhält man eine topologische Transformation

$$\bar{x} = \frac{v^1(x, y)}{v^3(x, y)} , \quad \bar{y} = \frac{v^2(x, y)}{v^3(x, y)} . \tag{20}$$

Sei deren Umkehrung

$$x = \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) , \quad y = \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}) ,$$

so ist

$$K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; p_0) , \quad \varphi^i(x, y) \equiv \varphi^i \{\bar{u}(x, y) , \ \bar{v}(x, y)\}$$

ein dem Kurven-3-Keim $K(q^1, q^2, q^3; p_0)$ stark topologisch äquivalenter Geraden-3-Keim.

Das System (18) ist projektiv invariant, d. h. zu projektiv äquivalenten Abbildungen gehören gleiche Funktionen C. Anderseits sind bei fester Funktion $C(x, y)$ alle skalaren Lösungen des Systems (18) Linearkombinationen dreier skalarer linear unabhängiger Fundamentallösungen, also alle Lösungsvektoren $\mathfrak{v}$ und damit auch alle aus ihnen nach (20) gewonnenen Abbildun-

[12]) a. u. [9]) a. O., S. 167 ff.

gen projektiv äquivalent. Es besteht also — unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen — eine eindeutige Zuordnung zwischen den projektiv verschiedenen Abbildungen, die den betrachteten Keim auf einen Geradenkeim abbilden, und den verschiedenen Lösungen $C(x, y)$ des Systems (19). Genau gilt der folgende Satz, der von *Bol* zwar benutzt[12]), aber nicht in dieser exakten Form ausgesprochen und bewiesen wurde:

Hilfssatz 4: Es sei

$\mathfrak{N}_6^3$ die Menge der in p_0 c_6-differenzierbaren Nichtsechseckkeime,

$\tilde{\mathfrak{N}} \leq \mathfrak{N}_6^3$ eine beliebige Teilmenge,

$K = K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; p_0) \varepsilon \mathfrak{N}_6^3$,

$\mathfrak{N}_C(K)$ die Anzahl der in p_0 nicht identischen, dort c_4-differenzierbaren Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$C_{11} \equiv -C C_2 - (P\varphi)_2, \quad C_{22} \equiv -C C_1 + (P\varphi)_1.$$

Dann ist

$$Z_5^3(\tilde{\mathfrak{N}}) = \operatorname*{Max}_{k \varepsilon \tilde{\mathfrak{N}}} N_C(K) = N_C(\tilde{\mathfrak{N}}).$$

Wir wenden uns daher im folgenden der Ermittlung von $N_C(\tilde{\mathfrak{N}})$ zu.

6. *Sechseckkeime und Sechseckgewebe.*

Zunächst können wir aus unseren weiteren Betrachtungen die Klasse von Keimen ausnehmen, die durch die topologisch invariante Bedingung

$$P\varphi \equiv 0$$

gekennzeichnet sind. Es handelt sich dabei um „Sechseckkeime", d. h. um Keime, die von sogenannten Sechseckgeweben (oder im Kleinen topologisch äquivalenten) induziert werden. Denn für diese Gewebe läßt sich die aufgeworfene Frage vollständig beantworten mit Hilfe des *Satzes von Graf und Sauer:*

Die geradlinigen Sechseckgewebe sind genau die Tangentengewebe der ebenen algebraischen Kurven der Klasse 3.

Hieraus folgert man

$$z_1^3(\mathfrak{S}) = \infty^1, \quad Z_1^3(\mathfrak{S}) = \infty^4,$$

wobei $\mathfrak{S}$ die Menge der Kurven-3-Gewebe bezeichnet, die im betrachteten Punkt p_0 im Kleinen auf ein Sechseckgewebe topologisch abbildbar sind. Wir beschränken uns hier auf diese kurzen Andeutungen, da dieser Fall bereits anderorts hinreichend diskutiert wurde[14]).

Im folgenden setzen wir also stets

$$P\varphi \not\equiv 0 \tag{21}$$

---

[13]) a. u. [9]) a. O., S. 9.

[14]) z. B. *Blaschke-Bol,* a. unter [9]) a. O., S. 20 ff., *Boruvka,* Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs, Publ. Masaryk 85 (1927), S. 19/20, *Dubourdieu,* Questions topologiques de géométrie différentielle, Mém. de Sc. Math. 78 (1936), S. 22/23, *Gronwall,* a. unter [8]) a. O., S. 81—93.

voraus und bezeichnen die dieser Bedingung genügenden Keime, dem allgemeinen Brauch folgend, als „Nichtsechseckkeime". $\mathfrak{T}_k$ sei die Menge der c_k-differenzierbaren Nichtsechseckkeime, also eine Teilmenge von $\mathfrak{N}_k^3$.

7. *Eine obere Schranke für* $N_C(\mathfrak{T}_9')$.

$\mathfrak{T}_k'$ sei eine später näher zu bezeichnende Teilmenge von $\mathfrak{T}_k$. $N_C(\mathfrak{T}_k')$ $(k \geqq 6)$ ist nach Hilfssatz 3 die maximale Anzahl der in $\mathfrak{p}_0$ nicht identischen, dort c_4-differenzierbaren Lösungen $C(x, y)$ des Differentialgleichungssystems

$$C_{11} \equiv -C C_2 - \varrho_2, \quad C_{22} \equiv -C C_1 + \varrho_1, \tag{22}$$

wenn $\varrho = P\varphi$ und $K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; \mathfrak{p}_0)$ ein beliebiger Keim der Menge $\mathfrak{T}_k' \leq \mathfrak{T}_k$ ist. Nach Hilfssatz 2 und (21) ist dann $P\varphi$ eine in $\mathfrak{p}_0$ nicht identisch verschwindende, dort c_{k-3}-differenzierbare Halbinvariante vom Gewicht 2. Wir untersuchen daher jetzt die in $\mathfrak{p}_0$ c_4-differenzierbaren Lösungen des Systems (22) unter der Voraussetzung, daß ϱ eine beliebige in $\mathfrak{p}_0$ nicht identisch verschwindende, dort c_{k-3}-differenzierbare Halbinvariante vom Gewicht 2 ist. Dazu benützen wir das Verfahren der „Integration durch Differentiation", d. h. wir differenzieren die vorliegenden Differentialgleichungen für C und beseitigen aus den so entstandenen Gleichungen mit Hilfe der ursprünglichen und der Integrabilitätsbedingungen schrittweise die höchsten Ableitungen. Dabei beachtet man vorteilhaft, daß das System (22) wie auch die Integrabilitätsbedingung

$$(I\varphi)_{12} - (I\varphi)_{21} \equiv \alpha\, \varrho\, I\varphi \tag{23}$$

eine Vertauschung der Differentiationsindizes 1 und 2 zuläßt, sofern man gleichzeitig ϱ durch $-\varrho$ ersetzt. Jede allein mit Hilfe von (22, 23) gewonnene Relation für C — alle in diesem Abschnitt auftretenden sind von der Art — gestattet also ebenfalls diese Vertauschung, die wir kurz als „Indizesvertauschung" bezeichnen wollen.

Zunächst sei $k \geq 6$. Dann ist ϱ in $\mathfrak{p}_0$ c_3-differenzierbar. Wir können also die Gleichungen (22) und die Integrabilitätsbedingung 2. Ordnung

$$C_{12} - C_{21} \equiv \varrho\, C$$

nochmals kovariant ableiten. Die entstehenden sechs Gleichungen und die Integrabilitätsbedingungen 3. Ordnung

$$C_{j12} - C_{j21} \equiv 2\varrho\, C_j \quad (j = 1, 2)$$

lassen sich nach den 3. kovarianten Ableitungen von C auflösen; man erhält

$$\begin{aligned}
C_{111} &\equiv -C C_{21} - C_1 C_2 - \varrho_{21}, \\
C_{112} &\equiv -C C_{22} - C_2^2 - \varrho_{22}, \\
C_{121} &\equiv -C C_{22} - C_2^2 - 2\varrho\, C_1 - \varrho_{22}, \\
C_{211} &\equiv -C C_{22} - C_2^2 - 3\varrho\, C_1 - \varrho_1 C - \varrho_{22}, \\
C_{122} &\equiv -C C_{11} - C_1^2 + 3\varrho\, C_2 + \varrho_2 C + \varrho_{11}, \\
C_{212} &\equiv -C C_{11} - C_1^2 + 2\varrho\, C_2 + \varrho_{11}, \\
C_{221} &\equiv -C C_{11} - C_1^2 + \varrho_{12}, \\
C_{222} &\equiv -C C_{12} - C_1 C_2 + \varrho_{12}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Da C in $\mathfrak{p}_0$ c_4-differenzierbar ist, können wir diese Gleichungen nochmals kovariant differenzieren. Ferner gelten die Integrabilitätsbedingungen 4. Ordnung

$$C_{ij12} - C_{ij21} \equiv 3\varrho\, C_{ij} \quad (i, j = 1, 2)\,. \tag{25}$$

Nehmen wir zusätzlich

$$\varrho(\mathfrak{p}) \not\equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0 \to \varrho(\mathfrak{p}_0) \neq 0\,, \tag{26}$$

d. h., da $\varrho(\mathfrak{p}) \not\equiv 0$ vorausgesetzt wurde, $\varrho(\mathfrak{p}_0) \neq 0$ an, so gewinnen wir aus (25), indem wir die dritten und vierten Ableitungen von C mittels (24), die Ableitungen C_{11}, C_{22} mittels (22) eliminieren, die Gleichungen

$$\begin{aligned} C_{12} &\equiv -\tfrac{3\varrho_2}{4\varrho}\, C_1 - \tfrac{3\varrho_1}{4\varrho} C_2 + \tfrac{1}{8}\, C^3 - \left(\tfrac{3\varrho_{12}}{8\varrho} - \tfrac{7}{8}\,\varrho\right) C - \tfrac{\varrho_{111} + \varrho_{222}}{8\varrho}\,, \\ C_{21} &\equiv -\tfrac{3\varrho_2}{4\varrho}\, C_1 - \tfrac{3\varrho_1}{4\varrho} C_2 + \tfrac{1}{8}\, C^3 - \left(\tfrac{3\varrho_{21}}{8\varrho} + \tfrac{7}{8}\,\varrho\right) C - \tfrac{\varrho_{111} + \varrho_{222}}{8\varrho}\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Weitere Beziehungen erhalten wir nicht, da die Integrabilitätsbedingungen (25) für i = j wegen (22) identisch erfüllt sind.

Für k = 7 ist ϱ in $\mathfrak{p}_0$ c_4-differenzierbar, die Gleichungen (27) können also nochmals kovariant differenziert werden. Eliminiert man die dritten Ableitungen von C wieder mittels (24), dann die zweiten mittels (22, 27), so ergeben sich die Relationen

$$\begin{aligned} C_1^2 \equiv{}& \left\{-\tfrac{3\varrho_1}{4\varrho}\, C + \tfrac{3\varrho_{22}}{4\varrho} - \tfrac{21\varrho_2^2}{16\varrho^2}\right\} C_1 + \left\{\tfrac{5}{8}\, C^2 + \tfrac{17}{8}\,\varrho - \tfrac{21\varrho_1\varrho_2}{16\varrho^2} + \tfrac{9\varrho_{12}}{8\varrho}\right\} C_2 + \\ &+ \tfrac{3\varrho_2}{32\varrho}\, C^3 + \left(\tfrac{57}{32}\,\varrho_2 + \tfrac{3\varrho_{122}}{8\varrho} - \tfrac{21\varrho_2\varrho_{12}}{32\varrho^2}\right) C + \varrho_{11} + \tfrac{3\varrho_1^2}{4\varrho} - \tfrac{7\varrho_2}{32\varrho^2}\,(\varrho_{111} + \varrho_{222}) + \\ &+ \tfrac{\varrho_{1112} + \varrho_{2222}}{8\varrho}\,, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} C_2^2 \equiv{}& \left\{\tfrac{5}{8}\, C^2 - \tfrac{17}{8}\,\varrho - \tfrac{21\varrho_1\varrho_2}{16\varrho^2} + \tfrac{9\varrho_{21}}{8\varrho}\right\} C_1 + \left\{-\tfrac{3\varrho_2}{4\varrho}\, C + \tfrac{3\varrho_{11}}{4\varrho} - \tfrac{21\varrho_1^2}{16\varrho_2}\right\} C_2 + \\ &+ \tfrac{3\varrho_1}{32\varrho}\, C^3 + \left(-\tfrac{57}{32}\,\varrho_1 + \tfrac{3\varrho_{211}}{8\varrho} - \tfrac{21\varrho_1\varrho_{21}}{32\varrho^2}\right) C - \varrho_{22} - \tfrac{3\varrho_2^2}{4\varrho} - \tfrac{7\varrho_1}{32\varrho^2}\,(\varrho_{111} + \varrho_{222}) + \\ &+ \tfrac{\varrho_{1111} + \varrho_{2221}}{8\varrho}\,. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen enthalten ϱ in 4. Differentiationsordnung.

Für k = 8 ist ϱ in $\mathfrak{p}_0$ c_5-differenzierbar; die Gleichungen (28) können also nochmals kovariant differenziert werden. Eliminiert man wieder die zweiten Ableitungen von C mittels (22, 27), so erhält man in $\mathfrak{p}_0$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &C\, C_1\, C_2 + \mathfrak{P}_{11}^{(2)}\, C_1 + \mathfrak{P}_{12}^{(2)}\, C_2 + \mathfrak{P}_{13}^{(5)} \equiv 0\,, \\ &\varrho_1\, C_1\, C_2 + \mathfrak{P}_{21}^{(3)}\, C_1 + \mathfrak{P}_{22}^{(2)}\, C_2 + \mathfrak{P}_{23}^{(4)} \equiv 0\,, \\ &\varrho_2\, C_1\, C_2 + \mathfrak{P}_{31}^{(2)}\, C_1 + \mathfrak{P}_{32}^{(3)}\, C_2 + \mathfrak{P}_{33}^{(4)} \equiv 0\,. \end{aligned} \tag{29a}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{P}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} R_i(\varrho, \varrho_1, \varrho_2 \ldots)\, C^i\,, \tag{29b}$$

d. h. ein Polynom in C vom Grade n, dessen Koeffizienten R_i in $\mathfrak{p}_0$ stetige rationale Funktionen der Halbinvarianten ϱ und ihrer kovarianten Ablei-

tungen sind. Offenbar treten in (29a) die Ableitungen von ϱ bis höchstens zur 5. Ordnung auf. Für die weiteren Untersuchungen benötigen wir ein wenig genauere Angaben über diese Polynome; man errechnet

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{P}_{11}^{(2)} = \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}_{12}^{(2)} = \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}_{13}^{(5)} = \tfrac{5}{208}\,C^5 + \mathfrak{P}^{(3)}\,,\\
&\mathfrak{P}_{21}^{(3)} = -\tfrac{1}{8}\,\varrho\,C^3 + \mathfrak{P}^{(1)}\,,\\
&\mathfrak{P}_{22}^{(2)} = \tfrac{3}{8}\,\varrho_2\,C^2 + \Big(-\tfrac{23\varrho_1^2}{16\varrho} + \tfrac{5}{4}\,\varrho_{11}\Big)C + \mathfrak{P}^{(0)}\,,\\
&\mathfrak{P}_{23}^{(4)} = \tfrac{1}{32}\,\varrho_1\,C^4 + \Big(-\tfrac{5\varrho_2^2}{32\varrho} + \tfrac{\varrho_{22}}{4}\Big)C^3 + \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}_{31}^{(2)} = \tfrac{3}{8}\,\varrho_1\,C^2 + \Big(-\tfrac{23\varrho_2^2}{16\varrho} + \tfrac{4}{5}\,\varrho_{22}\Big)C + \mathfrak{P}^{(0)}\,,\\
&\mathfrak{P}_{32}^{(3)} = -\tfrac{1}{8}\,\varrho\,C^3 + \mathfrak{P}^{(1)}\,,\\
&\mathfrak{P}_{33}^{(4)} = \tfrac{1}{32}\,\varrho_2\,C^4 + \Big(-\tfrac{5\varrho_1^2}{32\varrho} + \tfrac{\varrho_{11}}{4}\Big)C^3 + \mathfrak{P}^{(2)}\,.
\end{aligned}
\tag{29c}
$$

Das System (29) entspricht dem von *Bol* im Jahre 1931 ohne Verwendung der kovarianten Differentiation berechneten[15]). Er erhält daraus drei algebraische Gleichungen für C:

$$\mathfrak{P}^{(18)} \equiv 0\,,\quad \mathfrak{P}_1^{(17)} \equiv 0\,,\quad \mathfrak{P}_2^{(17)} \equiv 0\,,$$

aus denen er — mit unseren Bezeichnungen —

$$Z_5^3(\mathfrak{T}_8) \leqq 17$$

schließt. Das angewendete Verfahren läßt sich jedoch noch weiterführen:

Es sei $k = 9$, d. h. ϱ in $\mathfrak{p}_0$ c_6-differenzierbar. Dann können die Gleichungen (29) nochmals kovariant differenziert werden. Leitet man die Gleichung ($29a_2$) nach dem Index 1 ab und eliminiert mittels (22, 27) die zweiten Ableitungen von C, so ergibt sich die Relation

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{P}_{40}^{(1)}\,C_1\,C_2 + \mathfrak{P}_{41}^{(3)}\,C_1 + \mathfrak{P}_{42}^{(4)}\,C_2 + \mathfrak{P}_{43}^{(5)} \equiv 0\,,\\
&\mathfrak{P}_{40}^{(1)} = \tfrac{3}{4}\,\varrho_2\,C - \tfrac{35\varrho_1^2}{16\varrho} + \tfrac{9}{4}\,\varrho_{11}\,,\\
&\mathfrak{P}_{41}^{(3)} = -\tfrac{7}{32}\varrho_1\,C^3 + \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}_{42}^{(4)} = -\tfrac{7}{64}\,\varrho\,C^4 + \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}_{43}^{(5)} = \tfrac{3}{256}\,\varrho_2\,C^5 + \Big(-\tfrac{35\varrho_1^2}{128\varrho} + \tfrac{3}{16}\,\varrho_{11}\Big)C^4 + \mathfrak{P}^{(3)}\,.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Führen wir dann folgende Abkürzungen ein:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{P}_{n0}\,C_1\,C_2 + \mathfrak{P}_{n1}\,C_1 + \mathfrak{P}_{n2}\,C_2 + \mathfrak{P}_{n3} &= \{n_0\}\,,\\
\mathfrak{P}_{n1}\,C_1 + \mathfrak{P}_{n2}\,C_2 + \mathfrak{P}_{n3} &= \{n\}\,,
\end{aligned}
$$

so ist nach (29)

[15]) s. *Bol*, Geradlinige Kurvengewebe, Abh. Hamburg 8 (1931), S. 268.

$$
\begin{aligned}
&\varrho_2\{2_0\} - \varrho_1\{3_0\} \equiv \{5\} \equiv 0\,,\\
&\mathfrak{P}^{(3)}_{51} = -\tfrac{1}{8}\,\varrho\,\varrho_2\,C^3 + \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}^{(3)}_{52} = \tfrac{1}{8}\,\varrho\,\varrho_1\,C^3 + \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}^{(3)}_{53} = \mathfrak{P}^{(3)}\,,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varrho_2\{1_0\} - C\{3_0\} \equiv \{6\} \equiv 0\,,\\
&\mathfrak{P}^{(3)}_{61} = -\tfrac{3}{8}\,\varrho_1\,C^3 + \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}^{(4)}_{62} = \tfrac{1}{8}\,\varrho\,C^4 + \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}^{(5)}_{63} = -\tfrac{3}{416}\,\varrho_2\,C^5 + \left(\tfrac{5\varrho_1^{\,2}}{32\varrho} - \tfrac{1}{4}\,\varrho_{11}\right)C^4 + \mathfrak{P}^{(3)}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

und für $\varrho_1(\mathfrak{p}_0) \neq 0$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{128}{3}\left[\{4_0\} - \tfrac{3}{4}\,\varrho_2\{1_0\} + \left(\tfrac{35\varrho_1}{16\varrho} + \tfrac{9\varrho_{11}}{4\varrho_1}\right)\{2_0\} + \tfrac{7}{8}\{6\}\right] \equiv \{7\} \equiv 0\,,\\
&\mathfrak{P}^{(3)}_{71} = \left(35\varrho_1 - 12\,\tfrac{\varrho\,\varrho_{11}}{4\varrho_1}\right)C^3 + \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}^{(2)}_{72} = \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}^{(5)}_{73} = \tfrac{7}{13}\,\varrho_2\,C^5 + \left(\tfrac{35\varrho_1^{\,2}}{12\varrho} - \tfrac{13}{3}\,\varrho_{11}\right)C^4 + \mathfrak{P}^{(3)}\,.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Durch Indizesvertauschung ergibt sich für $\varrho_2(\mathfrak{p}_0) \neq 0$

$$
\begin{aligned}
&\{8\} \equiv 0\,,\\
&\mathfrak{P}^{(2)}_{81} = \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}^{(3)}_{82} = \left(35\varrho_2 - 12\,\tfrac{\varrho\,\varrho_{22}}{\varrho_2}\right)C^3 + \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}^{(5)}_{83} = \tfrac{7}{13}\,\varrho_1\,C^5 + \left(\tfrac{35\varrho_2^{\,2}}{12\varrho} - \tfrac{13}{3}\,\varrho_{22}\right)C^4 + \mathfrak{P}^{(3)}\,.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Es sei nunmehr zunächst $\varrho_1\varrho_2(\mathfrak{p}_0) \neq 0$. Dann gilt nach (31, 33, 34) für C_1, C_2 in $\mathfrak{p}_0$ das lineare Gleichungssystem

$$\{5\} \equiv 0\,,\ \{7\} \equiv 0\,,\ \{8\} \equiv 0\,.$$

Seine Determinante muß in $\mathfrak{p}_0$ identisch verschwinden:

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \mathfrak{P}^{(3)}_{51}, & \mathfrak{P}^{(3)}_{52}, & \mathfrak{P}^{(3)}_{53} \\ \mathfrak{P}^{(3)}_{71}, & \mathfrak{P}^{(2)}_{72}, & \mathfrak{P}^{(5)}_{73} \\ \mathfrak{P}^{(2)}_{81}, & \mathfrak{P}^{(3)}_{82}, & \mathfrak{P}^{(5)}_{83} \end{vmatrix} \equiv -\tfrac{7}{104}\,\varrho\{35(\varrho_1^{\,3} - \varrho_2^{\,3}) - 12\varrho(\varrho_1\,\varrho_{11} - \varrho_2\,\varrho_{22})\}C^{11} + \\
&\qquad + \mathfrak{P}^{(10)} \equiv -\tfrac{7}{104}\,\varrho\,A\,C^{11} + \mathfrak{P}^{(10)} \equiv 0\,.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Für $A(\mathfrak{p}_0) \neq 0$ können wir (35) in $\mathfrak{p}_0$ durch $-7\varrho\,A/104$ dividieren, C genügt dann dort notwendig einer algebraischen Gleichung der Form

$$C^{11} + \mathfrak{P}^{(10)} \equiv 0\,. \tag{36}$$

Die Koeffizienten von $\mathfrak{P}^{(10)}$ sind nach (29b) in $\mathfrak{p}_0$ stetige rationale Funktionen der Halbinvarianten ϱ und ihrer kovarianten Ableitungen.

Nehmen wir zusätzlich an:

$$A \equiv 35(\varrho_1^{\,3} - \varrho_2^{\,3}) - 12\varrho(\varrho_1\,\varrho_{11} - \varrho_2\,\varrho_{22}) \not\equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0 \to A(\mathfrak{p}_0) \neq 0\,, \tag{37}$$

so bleibt für $\varrho_1\varrho_2(\mathfrak{p}_0) \neq 0$ nur noch der Fall $A \equiv 0$ zu betrachten. Dann ist

$$
\begin{aligned}
&\varrho_1\{7\} - \varrho_2\{8\} \equiv \{9\} \equiv 0\,,\\
&\mathfrak{P}^{(3)}_{91} = (35\varrho_1{}^2 - 12\varrho\,\varrho_{11})\,C^3 + \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}^{(3)}_{92} = -(35\varrho_2{}^2 - 12\varrho\,\varrho_{22})\,C^3 + \mathfrak{P}^{(2)}\,,\\
&\mathfrak{P}^{(4)}_{93} \equiv -\tfrac{55}{60}(\varrho_1{}^3 - \varrho_2{}^3)\,C^4 + \mathfrak{P}^{(3)}\,.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&32\{6\} - \tfrac{3}{7}\{7\} \equiv \{10\} \equiv 0\,,\\
&\mathfrak{P}^{(3)}_{10,1} = \mathfrak{P}^{(3)}\,,\\
&\mathfrak{P}^{(4)}_{10,2} = 4\varrho\,C^4 + \mathfrak{P}^{(3)}\,,\\
&\mathfrak{P}^{(4)}_{10,3} = \mathfrak{P}^{(4)}\,.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Nach (31, 38, 39) gilt also für C_1, C_2 in $\mathfrak{p}_0$ das lineare Gleichungssystem

$$\{5\} \equiv 0\,,\quad \{9\} \equiv 0\,,\quad \{10\} \equiv 0\,.$$

Seine Determinante muß in $\mathfrak{p}_0$ identisch verschwinden:

$$
\begin{vmatrix}
\mathfrak{P}^{(3)}_{51}, & \mathfrak{P}^{(3)}_{52}, & \mathfrak{P}^{(3)}_{53}\\
\mathfrak{P}^{(3)}_{91}, & \mathfrak{P}^{(3)}_{92}, & \mathfrak{P}^{(4)}_{93}\\
\mathfrak{P}^{(3)}_{10,1}, & \mathfrak{P}^{(4)}_{10,2}, & \mathfrak{P}^{(4)}_{10,3}
\end{vmatrix}
\equiv -\tfrac{55}{12}\varrho\,\varrho_2(\varrho_1{}^3 - \varrho_2{}^3)\,C^{11} + \mathfrak{P}^{(10)} \equiv 0\,.
\tag{40}
$$

Wäre in $\mathfrak{p}_0$ $\varrho_1{}^3 \equiv \varrho_2{}^3$, so folgte durch Differentiation

$$
\begin{aligned}
\varrho_1{}^2\,\varrho_{11} &\equiv \varrho_2{}^2\,\varrho_{21}\,,\\
\varrho_1{}^2\,\varrho_{12} &\equiv \varrho_2{}^2\,\varrho_{22}
\end{aligned}
$$

und aus $A \equiv 0$

$$\varrho_1\,\varrho_{11} \equiv \varrho_2\,\varrho_{22}\,.$$

Daraus entnimmt man

$$\varrho_{12} - \varrho_{21} \equiv 2\varrho^2 \equiv 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\varrho(\mathfrak{p}_0) \neq 0$. Es ist also in $\mathfrak{p}_0$

$$\varrho_1{}^3 \not\equiv \varrho_2{}^3\,.$$

Nehmen wir zusätzlich an:

$$\varrho_1{}^3 - \varrho_2{}^3 \not\equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0 \to (\varrho_1{}^3 - \varrho_2{}^3)(\mathfrak{p}_0) \neq 0\,, \tag{41}$$

so ist notwendig

$$(\varrho_1{}^3 - \varrho_2{}^3)(\mathfrak{p}_0) \neq 0\,.$$

Dann kann man wegen $\varrho(\mathfrak{p}_0) \neq 0$, $\varrho_2(\mathfrak{p}_0) \neq 0$ (40) in $\mathfrak{p}_0$ durch

$$-\tfrac{55}{12}\varrho\,\varrho_2(\varrho_1{}^3 - \varrho_2{}^3)$$

dividieren, d. h. C genügt auch in diesem, und damit für $\varrho_1\varrho_2(\mathfrak{p}_0) \neq 0$ unter den zusätzlichen Voraussetzungen *stets* einer algebraischen Gleichung der Form (36).

Nehmen wir ferner zusätzlich an:

$$\varrho_j \not\equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0 \to \varrho_j(\mathfrak{p}_0) \neq 0 \quad (j = 1,2), \tag{42}$$

so ist nur noch der Fall

$$\varrho_1 \equiv 0, \ \varrho_2 \neq 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0 \tag{43}$$

zu betrachten; denn der Fall

$$\varrho_1 \neq 0, \ \varrho_2 \equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0$$

ergibt sich daraus durch Indizesvertauschung, und der Fall

$$\varrho_1 \equiv \varrho_2 \equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0$$

zieht

$$\varrho_{12} - \varrho_{21} \equiv 2\varrho^2 \equiv 0$$

nach sich, ist also ausgeschlossen. Nach (29a$_2$, 32, 34, 43) gilt dann für C_1, C_2 in $\mathfrak{p}_0$ das lineare Gleichungssystem

$$\{2\} \equiv 0, \ \{6\} \equiv 0, \ \{8\} \equiv 0.$$

Seine Determinante muß in $\mathfrak{p}_0$ identisch verschwinden:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{P}^{(3)}_{21}, & \mathfrak{P}^{(3)}_{22}, & \mathfrak{P}^{(3)}_{23} \\ \mathfrak{P}^{(2)}_{61}, & \mathfrak{P}^{(4)}_{62}, & \mathfrak{P}^{(5)}_{63} \\ \mathfrak{P}^{(2)}_{81}, & \mathfrak{P}^{(3)}_{82}, & \mathfrak{P}^{(4)}_{83} \end{vmatrix} \equiv -\frac{7\varrho}{2^7 \cdot 39}(55\varrho_2^2 - 56\varrho\,\varrho_{22})\,C^{11} + \mathfrak{P}^{(10)} \equiv 0. \tag{44}$$

Wäre in $\mathfrak{p}_0$

$$55\varrho_2^2 \equiv 56\varrho\,\varrho_{22},$$

so folgte wegen $\varrho_1 \equiv 0$

$$55\varrho_2\,\varrho_{21} \equiv 28\varrho\,\varrho_{221}$$

$$\varrho_{21} \equiv -2\varrho^2, \ \varrho_{221} \equiv \varrho_{212} - 3\varrho\,\varrho_2 \equiv -7\varrho\,\varrho_2,$$

also

$$\varrho^2\,\varrho_2 \equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0$$

im Widerspruch zu den Voraussetzungen. Es ist also notwendig in $\mathfrak{p}_0$

$$55\varrho_2^2 \not\equiv 56\varrho\,\varrho_{22}.$$

Nehmen wir schließlich zusätzlich an:

$$55\varrho^2 - 56\varrho\,\varrho_{22} \not\equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0 \to (55\varrho_2^2 - 56\varrho\,\varrho_{22})(\mathfrak{p}_0) \neq 0, \tag{45}$$

so ist notwendig

$$(55\varrho_2^2 - 56\varrho\,\varrho_{22})(\mathfrak{p}_0) \neq 0.$$

Dann können wir (44) in $\mathfrak{p}_0$ durch

$$-\frac{7\varrho}{2^7 \cdot 39}(55\varrho_2^2 - 56\varrho\,\varrho_{22})$$

dividieren, d. h. C genügt unter den zusätzlichen Voraussetzungen — das sind (26, 37, 41, 45) — in *jedem* Falle einer algebraischen Gleichung der Form (36). Wir fassen das Ergebnis zusammen:

Hilfssatz 5: Ist ϱ eine in $\mathfrak{p}_0$ nicht identisch verschwindende, dort c_6-differenzierbare Halbinvariante vom Gewicht 2 und gilt

$$
\begin{aligned}
&\varrho \not\equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0 \rightarrow \varrho(\mathfrak{p}_0) \neq 0\,,\\
&35(\varrho_1{}^3 - \varrho_2{}^3) - 12\varrho(\varrho_1\,\varrho_{11} - \varrho_2\,\varrho_{22}) \not\equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0 \rightarrow\\
&\qquad \rightarrow \{35(\varrho_1{}^3 - \varrho_2{}^3) - 12\varrho(\varrho_1\,\varrho_{11} - \varrho_2\,\varrho_{22})\}\,(\mathfrak{p}_0) \neq 0\,,\\
&\varrho_1{}^3 - \varrho_2{}^3 \not\equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0 \rightarrow \{\varrho_1{}^3 - \varrho_2{}^3\}\,(\mathfrak{p}_0) \neq 0\,,\\
&\varrho_1 \not\equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0 \rightarrow \varrho_1(\mathfrak{p}_0) \neq 0\,,\\
&\varrho_2 \not\equiv 0 \text{ in } \mathfrak{p}_0 \rightarrow \varrho_2(\mathfrak{p}_0) \neq 0\,,
\end{aligned}
\tag{46}
$$

so genügt jede in $\mathfrak{p}_0$ c_4-differenzierbare Lösung des Differentialgleichungssystems (22) in $\mathfrak{p}_0$ einer algebraischen Gleichung

$$C^{11} + \sum_{i=0}^{10} R_i(\varrho, \varrho_1, \varrho_2 \ldots)\, C^i \equiv 0\,,$$

in der die Koeffizienten R_i in $\mathfrak{p}_0$ stetige rationale Funktionen der Halbinvarianten ϱ und ihrer kovarianten Ableitungen sind.

Es gibt also unter den angegebenen Voraussetzungen in $\mathfrak{p}_0$ höchstens elf nicht identische Lösungen des Systems (22). Bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}_9'$ die Menge der Kurven-3-Keime aus $\mathfrak{T}_9$, für die $\varrho = P\varphi$ die Bedingungen (46) erfüllt, so ist damit

$$N_C(\mathfrak{T}_9') \leqq 11\,. \tag{47}$$

8. Eine obere Schranke für $Z_5^3(\mathfrak{T}_9)$.

Nach Hilfssatz 3 folgt aus (47):
Auf Grund der besonderen Art der die Menge $\mathfrak{T}_9'$ bestimmenden Bedingungen (46) gilt

$$Z_5^3(\mathfrak{T}_9') = Z_5^3(\mathfrak{T}_9)\,.$$

Wir erhalten also

$$\boxed{Z_5^3(\mathfrak{T}_9) \leqq 11} \tag{48a}$$

und nach Hilfssatz 1 auch

$$\boxed{z_5^1(\mathfrak{T}_9) \leqq 11}\,. \tag{48b}$$

Diese Ergebnisse lassen sich wieder weniger exakt folgendermaßen aussprechen:

Ein beliebiges 3-Nomogramm, dessen Kurven-3-Gewebe in $\mathfrak{p}_0$ einen c_9-differenzierbaren Nichtsechseckkeim induziert, läßt sich dort auf höchstens elf im Kleinen projektiv verschiedene geradlinige 3-Nomogramme im Kleinen c_5-differenzierbar-topologisch abbilden.
Ein beliebiges Kurven-3-Gewebe, das in $\mathfrak{p}_0$ einen c_9-differenzierbaren Nichtsechseckkeim induziert, läßt sich dort auf höchstens elf im Kleinen projektiv verschiedene Geraden-3-Gewebe im Kleinen c_5-differenzierbar-topologisch abbilden.

Wir beschreiten jetzt einen völlig anderen Weg, um das gestellte Problem anzugreifen. Er wird gewiesen von folgender geometrisch inspirierten Vermutung:

> Bildet man ein Geraden-3-Gewebe, dessen eine Geradenschar eine Hüllkurve besitzt, wieder auf ein Geraden-3-Gewebe topologisch ab, so geht — unter gewissen Voraussetzungen — auch jedes mit einer weiteren Tangentenschar dieser Hüllkurve gebildete Geraden-4-Gewebe wieder in ein Geraden-4-Gewebe über.

Es handelt sich dann also um die Abbildung eines Geraden-4-Gewebes auf ein Geraden-4-Gewebe, die nach Nr. 3 notwendig projektiv ist. Damit wäre für alle Kurven-3-Gewebe, die auf das erwähnte Geraden-3-Gewebe im Kleinen topologisch abbildbar sind, die projektive Eindeutigkeit ihrer topologischen Abbildung auf Geradengewebe bewiesen.

Da die Hüllkurve und ihre weiteren Tangentenscharen imaginär sein können, erscheint es angebracht, die angedeuteten Untersuchungen im Komplexen zu führen. Dabei muß man offenbar, um überhaupt differenzieren zu können, für Gewebe und Abbildungen Analytizität voraussetzen. Die Keime, die solche analytischen komplexen Gewebe induzieren, wollen wir als „komplexe Keime" bezeichnen. Sie wären also exakt folgendermaßen zu definieren.

Definition 9: Die (komplexen) Funktionen $\varphi^i(\mathfrak{p})\,(i = 1\,..\,n;\ n \geqq 2)$ seien im Punkte $\mathfrak{p}_0$ definiert und analytisch, und es gelte

$$D^{ik}(\mathfrak{p}_0) = \frac{\partial(\varphi^i,\varphi^k)}{\partial(x,y)}(\mathfrak{p}_0) \not\equiv 0\ (i,k = 1\,..\,n;\ i \not\equiv k)\,.$$

Dann bildet das n-tupel $(\varphi^1,..\,\varphi^n)$ einen *komplexen Kurven-n-Keim* $K(\varphi^1,..\,\varphi^n;\mathfrak{p}_0)$. Gilt in $\mathfrak{p}_0$

$$\Delta\varphi^i \equiv (\varphi_y{}^i)^2\,\varphi^i_{xx} - 2\varphi_x{}^i\,\varphi_y{}^i\,\varphi^i_{xy} + (\varphi_x{}^i)^2\,\varphi^i_{yy} \equiv 0\ (i = 1\,..\,n)\,,$$

so heißt $K(\varphi^1,..\,\varphi^n;\mathfrak{p}_0)$ auch *komplexer Geraden-n-Keim.*

Wir übertragen auf diese komplexen Keime die Definition der starken Γ-Äquivalenz:

Definition 10: Es seien

$K(\varphi^1,..\,\varphi^n;\mathfrak{p}_0)$, $K(\psi^1,..\,\psi^n;\mathfrak{p}_0)$ komplexe Kurven-n-Keime,
T die Gruppe der in $\mathfrak{p}_0$ analytischen[5]) Transformationen der komplexen xy-Ebene, deren Funktionaldeterminante in $\mathfrak{p}_0$ nicht verschwindet und die den Punkt $\mathfrak{p}_0$ in sich überführen, und
$\Gamma \leqq T_*$ eine beliebige Untergruppe.

Gibt es dann eine Transformation $\bar{\mathfrak{p}} = g(\mathfrak{p})$ aus Γ, so daß in $\mathfrak{p}_0$

$$\psi^i\{g(\mathfrak{p})\} \equiv \varphi^i(\mathfrak{p})\ \ (i = 1\,..\,n)$$

ist, so sind die beiden Keime *stark Γ-äquivalent* — in Zeichen

$$K(\varphi^1,..\,\varphi^n;\mathfrak{p}_0) \underset{\Gamma}{\approx} K(\psi^1,..\,\psi^n;\mathfrak{p}_0)\,.$$

Die Möglichkeit, unsere reellen Untersuchungen durch Operationen im Komplexen zu fördern, gibt nunmehr folgende Aussage:

Hilfssatz 6: Es sei

$\mathfrak{p}_0 = (x_0, y_0)$ ein reeller Punkt der komplexen xy-Ebene,

$\mathfrak{N}_a^n$ die Menge der c_a-differenzierbaren (reellen) Kurven-n-Keime in $\mathfrak{p}_0$,

$\mathfrak{N}_*^n$ die Menge der komplexen Kurven-n-Keime in $\mathfrak{p}_0$,

$\tilde{\mathfrak{N}}_*^n$ die Menge der komplexen Geraden-n-Keime in $\mathfrak{p}_0$,

$\Pi_* < T_*$ die Untergruppe der linear gebrochenen Transformationen,

$Y^n(K)$ die maximale Anzahl der komplexen Geraden-n-Keime $K_j \varepsilon \tilde{\mathfrak{N}}_*^n$, die bei gegebenem komplexen Kurven-n-Keim die Bedingungen

$$K_j \underset{T_*}{\approx} K\,, \quad K_i \not\underset{\Pi_*}{\approx} K_j \quad (i \neq j)$$

erfüllen. Dann ist für $\tilde{K} \varepsilon \mathfrak{N}_a^n \varepsilon \mathfrak{N}_*^n$

$$Z_a^n(\tilde{K}) \leqq Y^n(\tilde{K}). \tag{49}$$

Jede obere Schranke für $Y^n(K)$ ist also zugleich obere Schranke für $Z_a^n(K)$. Ebenso wie im Reellen — vgl. Nr. 3 — zeigt man, daß

$$Y(\mathfrak{N}_*^n) \leqq 1 \quad (n \geqq 4) \tag{50}$$

ist. Diese Aussage vermag zwar das in Nr. 3 gefundene Ergebnis nicht zu verbessern, sie wird uns aber im folgenden nützlich sein.

10. Analytische Geraden-3-Keime mit mehrdeutiger Normalparametergleichung.

Zwischen den drei Normalparametern $\varphi^i(x, y)$ eines Kurven-3-Keims $K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; \mathfrak{p}_0)$ besteht in $\mathfrak{p}_0$ eine Relation

$$\varphi^3(x, y) \equiv f\{\varphi^1(x, y), \varphi^2(x, y)\}\,;$$

wir bezeichnen die Gleichung

$$\xi^3 = f(\xi^1, \xi^2) \tag{51}$$

als *Normalparametergleichung* des betrachteten Keimes. Sie hat folgende anschauliche Bedeutung: Ist $G(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; (\mathfrak{G}))$ das induzierende Gewebe, so schneiden sich jeweils die drei Kurven

$$\varphi^i(x, y) = \xi^i \quad (i = 1, 2, 3)\,,$$

für die $\xi^3 = f(\xi^1, \xi^2)$ gilt, in einem Punkt. Ist nun im erzeugenden Gewebe etwa

$$\varphi^1(x, y) = \text{const.}$$

die in der obigen Vermutung hervorgehobene Tangentenschar, so hat das im allgemeinen zur Folge, daß die Gleichung (51) im Punkte

$$(\xi_0^2, \xi_0^3)\,, \quad \xi_0^i = \varphi^i(x_0, y_0)\,,$$

mehrdeutig nach ξ^1 auflösbar ist. Dieser Fall ist also zu betrachten.

Für komplexe Geraden-3-Keime gilt folgende notwendige und hinreichende Bedingung:

Hilfssatz 7: Ein komplexer Kurven-3-Keim $K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; \mathfrak{p}_0)$ ist genau dann komplexer Geraden-3-Keim, wenn es — eventuell nach einer Translation des Bezugssystems in der komplexen xy-Ebene — in $\xi_0^i = \varphi^i(\mathfrak{p}_0)$ analytische Funktionen $u_k^i(\xi^i)$ $(i, k = 1, 2, 3)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. In $\mathfrak{p}_0$ [16]) gilt

$$u_1^j\{\varphi^j(x, y)\}x + u_2^j\{\varphi^j(x, y)\}y + u_3^j\{\varphi^j(x, y)\} \equiv 0 \quad (j = a, b;\ a, b \varepsilon \{1, 2, 3\};\ a \neq b). \tag{52}$$

2. In ξ_0^i ist

$$u_3^i(\xi^i) \not\equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{53}$$

und die dort also meromorphen Funktionen

$$u^i(\xi^i) = \frac{u_1^i(\xi^i)}{u_3^i(\xi^i)},\ v^i(\xi^i) = \frac{u_2^i(\xi^i)}{u_3^i(\xi^i)} \quad (i = 1, 2, 3)$$

sowie die Normalparametergleichung $\xi^3 = f(\xi^1, \xi^2)$ erfüllen in $\pi_0 = (\xi_0^1, \xi_0^2, \xi_0^3)$ die Bedingung B′:

Es gibt eine Umgebung $\mathfrak{U}_B$ von π_0, in der die Funktion $f(\xi^1, \xi^2)$ analytisch ist, mit der Eigenschaft, daß die Funktionen $u^i(\xi^i)$, $v^i(\xi^i)$ in $\mathfrak{U}_B$ meromorph sind und in jedem Punkt

$$\pi_a = \{\xi_a^1, \xi_a^2, f(\xi_a^1, \xi_a^2)\},$$

in dem sie sich sämtlich regulär verhalten, die Determinante

$$\Delta(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = |\, u^i(\xi^i), v^i(\xi^i), 1 \,| \tag{54}$$

den Relationen

$$\Delta\{\xi^1, \xi^2, f(\xi^1, \xi^2)\} \equiv 0,\ \frac{\partial}{\partial \xi^i} \Delta\{\xi^1, \xi^2, f(\xi^1, \xi^2)\} \not\equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{55}$$

genügt.

Der exakte Beweis dieses Satzes erfordert beträchtlichen Raum, jedoch leuchtet sein Inhalt ohne weiteres ein: Die Bedingungen $(52, 55_1)$ besagen gerade, daß für jede Kurve $\varphi^i(x, y) = \xi^i$ die Beziehung

$$u_1^i(\xi^i)\, x + u_2^i(\xi^i)\, y + u_3^i(\xi^i) \equiv 0$$

gilt, d. h. daß die Kurvenkeime $\varphi^i(x, y)$ in $\mathfrak{p}_0$ tatsächlich durch Geradenscharen induziert werden; die Funktionen $u^i(\xi^i)$, $v^i(\xi^i)$ sind deren Linienkoordinaten. Die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0^a} \Delta\{\xi_0^1, \xi_0^2, f(\xi_0^1, \xi_0^2)\} = 0 \quad (a \varepsilon \{1, 2, 3\})$$

besagt im wesentlichen, daß die Hüllkurve der Schar $\varphi^a(x, y) = \xi^a$ durch den Punkt $\mathfrak{p}_0$ geht. Der Ausdruck (55_2) kann also normalerweise nicht identisch verschwinden. Die Bedingung (53) schließlich besagt lediglich, daß

[16]) vgl. Fußnote [6]). In den folgenden funktionentheoretischen Untersuchungen ist unter $\mathfrak{U}$ natürlich stets eine komplexe Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ zu verstehen.

keine der induzierten Geradenscharen ein Geradenbüschel mit Scheitel im Ursprung ist. Das kann aber in der Tat durch Translation des Bezugssystems vermieden werden.

Wir benötigen die durch Hilfssatz 7 gegebene komplizierte Bedingung für den an sich einfachen Sachverhalt, um einen funktionentheoretischen Hilfssatz über die Determinante Δ anwenden zu können. Er lautet:

Hilfssatz 8: Die komplexen Funktionen $\psi^i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ der reellen Veränderlichen t seien stetig für $0 \leqq t \leqq 1$, und es gelte $\psi^i(0) = \xi_0^i$, d. h.

$$\mathfrak{W}(t) = \{\psi^1(t), \psi^2(t), \psi^3(t)\},\ 0 \leqq t \leqq 1,$$

sei ein von $\pi_0 = (\xi_0^1, \xi_0^2, \xi_0^3)$ ausgehendes Wegstück im Raum der drei komplexen Veränderlichen ξ^1, ξ^2, ξ^3. Die Funktion $f(\xi^1, \xi^2)$ sei längs $\mathfrak{W}|_0^1$ [17]) analytisch, und es gelte für $0 \leqq t \leqq 1$.

$$\begin{gathered} f\{\psi^1(t), \psi^2(t)\} = \psi^3(t) \\ \frac{\partial}{\partial \xi^j} f\{\psi^1(t), \psi^2(t)\} \neq 0 \quad (j = 1, 2). \end{gathered} \tag{56}$$

Die Funktionen $u^i(\xi^i)$, $v^i(\xi^i)$ $(i = 1, 2, 3)$ erfüllen in π_0 die Bedingung B′ (vgl. Hilfssatz 7).

Dann sind die Funktionen $u^i(\xi^i)$, $v^i(\xi^i)$ $(i = 1, 2, 3)$ längs $\mathfrak{W}|_0^1$ meromorph fortsetzbar, und die so längs $\mathfrak{W}|_0^1$ definierten Zweige dieser Funktionen erfüllen in $\mathfrak{W}(1)$ ebenfalls die Bedingung B′.

Diese Aussage gilt auch dann noch, wenn für endlich viele Werte $\tilde{t}$, $0 < \tilde{t} \leqq 1$, statt (56_2)

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial \xi^1}\{\psi^1(\tilde{t}), \psi^2(\tilde{t})\} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^j \partial \xi^1}\{\psi^1(\tilde{t}), \psi^2(\tilde{t})\} \neq 0 \quad (j = 1, 2), \\ \frac{\partial f}{\partial \xi^2}\{\psi^1(\tilde{t}), \psi^2(\tilde{t})\} \neq 0 \end{gathered} \tag{57}$$

ist.

Dieser Hilfssatz ist der Angelpunkt unserer gesamten Untersuchungen im Komplexen.

Mittels Hilfssatz 7 und 8 beweist man:

Hilfssatz 9: Es sei

$\tilde{\mathfrak{N}}_*^3 \leq \mathfrak{N}_*^3$ die Teilmenge der komplexen Kurven-3-Keime in $\mathfrak{p}_0$, deren Normalparametergleichung $\xi^3 = f(\xi^1, \xi^2)$ folgende Eigenschaften besitzt:

1. Es gibt im Raum der drei komplexen Veränderlichen ξ^1, ξ^2, ξ^3 einen Weg

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{W}(t) &= \{\psi^1(t), \psi^2(t), \psi^3(t)\} \\ \psi^j(t) &= \psi^j(1-t)\ (j = 2, 3) \end{aligned}\right\} 0 \leqq t \leqq 1,$$
$$\psi^i(0) = \xi_0^i = \varphi^i(\mathfrak{p}_0)\ (i = 1, 2, 3),$$

[17]) $\mathfrak{W}|_0^1 : \mathfrak{W}(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$.

so daß die Funktion $f(\xi^1, \xi^2)$ längs $\mathfrak{W}|_0^1$ analytisch,

$$\psi^3(t) = f\{\psi^1(t), \psi^2(t)\},\ 0 \leqq t \leqq 1,$$

und für endlich viele Werte $\tilde{t}$, $0 < \tilde{t} < 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^j}\{\psi^1(t), \psi^2(t)\} \neq 0\ (j = 1,2),\ 0 \leqq t \leqq 1,\ t \neq \tilde{t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^1}\{\psi^1(\tilde{t}), \psi^2(\tilde{t})\} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial \xi^2}\{\psi^1(\tilde{t}), \psi^2(\tilde{t})\} \neq 0, \tag{58}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^j \partial \xi^1}\{\psi^1(\tilde{t}), \psi^2(\tilde{t})\} \neq 0\ (j = 1, 2)$$

ist.

2. Sind

$$\xi^1 = f^1(\xi^2, \xi^3),\ \xi^1 = f^1_*(\xi^2, \xi^3)$$

die durch (58_1) garantierten eindeutigen Auflösungen der Gleichung $\xi^3 = f(\xi^1, \xi^2)$ nach ξ^1 in $\mathfrak{W}(0)$ bzw. $\mathfrak{W}(1)$, so gilt

$$\frac{\partial(f^1, f^1_*)}{\partial(\xi^2, \xi^3)}(\xi^2_0, \xi^3_0) \neq 0,\ \frac{\partial f^1_*}{\partial \xi^j}(\xi^2_0, \xi^3_0) \neq 0\ (j = 2, 3).$$

Dann existiert für jeden komplexen Kurven-3-Keim $K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; \mathfrak{p}_0)$ $\varepsilon\, \tilde{\mathfrak{N}}^3_*$ der komplexe Kurven-4-Keim

$$K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^1_*; \mathfrak{p}_0),\ \varphi^1_*(\mathfrak{p}) = f^1_*\{\varphi^2(\mathfrak{p}), \varphi^3(\mathfrak{p})\};$$

er ist komplexer Geraden-4-Keim, wenn $K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; \mathfrak{p}_0)$ komplexer Geraden-3-Keim ist.

Der wesentliche Kunstgriff des Beweises liegt darin, daß die Funktionen $u^j(\xi^j), v^j(\xi^j)$ $(j = 2, 3)$ bei meromorpher Fortsetzung längs $\mathfrak{W}|_0^1$ zu den gleichen Funktionselementen zurückkehren, weil die Projektion von $\mathfrak{W}|_0^1$ in die komplexe $\xi^1\xi^2$-Ebene ein doppelt durchlaufener Weg von (ξ^2_0, ξ^3_0) nach $\{\psi^2(\frac{1}{2}), \psi^3(\frac{1}{2})\}$ und wieder zurück ist. Nur die Linienkoordinaten $u^1(\xi^1), v^1(\xi^1)$ der ersten Geradenschar ändern sich, ihre meromorphen Fortsetzungen in $\mathfrak{W}(1)$ sind gerade die Linienkoordinaten der Schar

$$\psi^1_*(x, y) = \xi^1_*.$$

Da alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 9 nur die Normalparametergleichung betreffen und diese invariant gegenüber analytischen Abbildungen aus T_* ist, gilt dasselbe notwendig auch für die Aussage des Satzes. Daher ist für jeden komplexen Geraden-3-Keim $K(\psi^1, \psi^2, \psi^3; \mathfrak{p}_0)$, der dem Keim $K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; \mathfrak{p}_0)$ stark T_*-äquivalent ist, notwendig auch der komplexe Kurven-4-Keim

$$K(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^1_*; \mathfrak{p}_0),\ \psi^1_*(\mathfrak{p}) = f^1_*\{\psi^2(\mathfrak{p}), \psi^3(\mathfrak{p})\},$$

vorhanden und ein Geraden-4-Keim. Wegen der starken T_*-Äquivalenz gibt es nach Definition 10 eine Transformation $\bar{\mathfrak{p}} = g(\mathfrak{p})$ aus T_*, so daß

$$\psi^i\{g(\mathfrak{p})\} \equiv \varphi^i(\mathfrak{p})\ (i = 1, 2, 3)$$

ist. Dann ist auch

$$\psi^1_*\{g(\mathfrak{p})\} \equiv \varphi^1_*(\mathfrak{p}),$$

die Transformation $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{g}(\mathfrak{p})$ vermittelt also auch starke T_*-Äquivalenz zwischen den komplexen Geraden-4-Keimen $K(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^1_* ; \mathfrak{p}_0)$ und $K(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^1_* ; \mathfrak{p}_0)$. Daher muß nach (50) $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{g}(\mathfrak{p})$ eine linear gebrochene Transformation sein, d. h. es gilt für zwei komplexe Geraden-3-Keime $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$ der Menge $\tilde{\mathfrak{N}}^3_*$ stets

$$\bar{K}_1 \underset{T_*}{\approx} \bar{K}_2 \rightarrow \bar{K}_1 \underset{\Pi_*}{\approx} \bar{K}_2 .$$

Hieraus folgt sofort

(59) $$Y^n(\tilde{\mathfrak{N}}^3_*) \leqq 1 .$$

11. Auswertung des Ergebnisses von Nr. 10 für reelle Keime.

Ist $\tilde{\mathfrak{N}}^3_a$ die Menge der reellen Kurven-3-Keime aus $\tilde{\mathfrak{N}}^3_*$, so schließt man mittels Hilfssatz 6 aus (59)

$$Z^3_a(\tilde{\mathfrak{N}}^3_a) \leqq 1 .$$

Man kann darüber hinaus zeigen, daß die Analytizität der zulässigen Abbildungen nicht wesentlich ist, es genügt c_5-Differenzierbarkeit, d. h. es ist

$$Z^3_5(\mathfrak{N}^3_a) = Z^3_a(\tilde{\mathfrak{N}}^3_a) \leqq 1 .$$

Wir können daher die Menge $\tilde{\mathfrak{N}}^3_a$ erweitern zur Menge $\tilde{\mathfrak{N}}^3_5$ aller (reellen) Kurven-3-Keime, die Keimen aus $\tilde{\mathfrak{N}}^3_a$ T_5-äquivalent sind. $\tilde{\mathfrak{N}}^3_5$ ist dann gerade die Menge der c_5-differenzierbaren Kurven-3-Keime, deren Normalparametergleichung die in Hilfssatz 7 genannten Eigenschaften besitzt. Wir können somit als Endergebnis feststellen:

(59 a) $$\boxed{Z^3_5(\tilde{\mathfrak{N}}^3_5) \leqq 1} .$$

Nach Hilfssatz 1 ist dann auch

(59 b) $$\boxed{z^3_5(\tilde{\mathfrak{N}}^3_5) \leqq 1} .$$

In Worten kann man das wieder etwa folgendermaßen formulieren:

Induziert ein 3-Nomogramm in $\mathfrak{p}_0$ einen c_5-differenzierbaren Kurven-3-Keim, dessen Normalparametergleichung $\xi^3 = f(\xi^1, \xi^2)$ die in Hilfssatz 9 angegebenen Eigenschaften besitzt, und läßt es sich dort im Kleinen auf zwei geradlinige 3-Nomogramme c_5-differenzierbar-topologisch abbilden, so kann man diese beiden geradlinigen 3-Nomogramme dort im Kleinen projektiv aufeinander abbilden.

Induziert ein Kurven-3-Gewebe in $\mathfrak{p}_0$ einen c_5-differenzierbaren Kurven-3-Keim, dessen Normalparametergleichung $\xi^3 = f(\xi^1, \xi^2)$ die in Hilfssatz 9 angegebenen Eigenschaften besitzt, und läßt es sich dort im Kleinen auf zwei Geraden-3-Gewebe c_5-differenzierbar-topologisch abbilden, so kann man diese beiden Geraden-3-Keime dort im Kleinen projektiv aufeinander abbilden.

Die hier vorausgesetzten, in Hilfssatz 9 ausführlich zitierten Bedingungen für die Normalparametergleichung scheinen zunächst recht kompliziert. Ihr geometrischer Gehalt ist jedoch einfach folgender: Es wird verlangt, daß das komplexe analytische Flächenstück $\xi^3 = f(\xi^1, \xi^2)$ einen Punkt $(\xi^1_*, \xi^2, \xi^3_0)$ mit $\xi^1_* \neq \xi^1_0$ enthält und einen Weg, der diesen Punkt so mit dem Punkt $(\xi^1_0, \xi^2_0, \xi^3_0)$ verbindet, daß die Projektion in die komplexe $\xi^2\xi^3$-Ebene ein doppelt durchlaufenes Wegstück ist. Man sieht leicht ein, daß diese Forderungen bei den elementaren mehrdeutig nach ξ^1 auflösbaren analytischen Funktionen $f(\xi^1, \xi^2)$, insbesondere bei den Polynomen, im allgemeinen realisierbar sind.